

## Глава 2

### Движение синхронной машины с позиции аналитической динамики

#### § 2.1. Основные положения аналитической динамики

Аналитическая динамика, родоначальником которой является Лагранж, при помощи средств математического анализа изучает движение материальных точек или систем, которое вызвано их взаимодействием\*.

Система материальных точек называется голономной, если всякое ее перемещение, определяемое любым бесконечно малым изменением координат, является возможным. Число степеней свободы голономной системы всегда равно числу независимых координат, необходимых для определения ее конфигурации.

Примером голономной системы может служить гладкий шар, находящийся на гладкой поверхности. При движении шара в любом направлении по плоскости перемещение точки касания может определяться любым бесконечно малым изменением координат без нарушения связей в этой системе.

Примером неголономной системы может служить граненый шар, находящийся на той же гладкой поверхности. Очевидно, при движении граненого шара в любом направлении по плоскости перемещение точки касания не может определяться любым бесконечно малым изменением координат, ибо происходит нарушение связей: шар может подняться на ребро или опуститься на плоскость грани.

Технические задачи, как правило, приводятся к рассмотрению голономных систем.

Если конфигурация голономной системы материальных точек в момент времени  $t$  обозначена координатами  $q_1, \dots, q_n$ , а какая-нибудь одна точка системы с массой  $m_i$  – координатами  $x_i, y_i, z_i$  относительно неподвижной прямоугольной системы осей, то последние координаты, в силу известной структуры материальной системы, могут быть выражены в функции координат  $q_1, \dots, q_n$  [15]

$$\left. \begin{aligned} x_i &= f_i(q_1, \dots, q_n, t); \\ y_i &= \varphi_i(q_1, \dots, q_n, t); \\ z_i &= \psi_i(q_1, \dots, q_n, t). \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

\* Lagrange J.L. Mecanique Analytique, 1788.

Если компоненты равнодействующей всех сил, действующих на рассматриваемую точку массой  $m_i$ , имеют величины  $X_i, Y_i, Z_i$ , то движение этой точки в соответствии со вторым законом Ньютона определяется уравнениями

$$m_i \ddot{x}_i = X_i, \quad m_i \ddot{y}_i = Y_i, \quad m_i \ddot{z}_i = Z_i.$$

Умножая эти уравнения соответственно на частные производные

$$\frac{\partial f_i}{\partial q_k}, \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_k}, \quad \frac{\partial \psi_i}{\partial q_k},$$

а затем, распространяя результат на все точки системы, можно получить

$$\begin{aligned} & \sum_i m_i \left( \ddot{x}_i \frac{\partial f_i}{\partial q_k} + \ddot{y}_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_k} + \ddot{z}_i \frac{\partial \psi_i}{\partial q_k} \right) = \\ & = \sum_i \left( X_i \frac{\partial f_i}{\partial q_k} + Y_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_k} + Z_i \frac{\partial \psi_i}{\partial q_k} \right), \quad (k = 1, \dots, n). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Заметив, что частные производные  $\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k}, \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \dot{q}_k}, \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial \dot{q}_k}$  определя-

ются равенством вида  $\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left( \frac{\partial f_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial f_i}{\partial t} \right) = \frac{\partial f_i}{\partial q_k}$ ,

получим

$$\begin{aligned} \ddot{x}_i \frac{\partial f_i}{\partial q_k} &= \ddot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{d}{dt} \left( \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k} \right) - \dot{x}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k} \right) = \\ &= \frac{d}{dt} \left( \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k} \right) - \dot{x}_i \left( \frac{\partial^2 f_i}{\partial q_1 \partial q_k} \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial^2 f_i}{\partial q_n \partial q_k} \dot{q}_n + \frac{\partial^2 f_i}{\partial t \partial q_k} \right) = \\ &= \frac{d}{dt} \left( \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k} \right) - \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left( \frac{1}{2} \dot{x}_i^2 \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_k} \left( \frac{1}{2} \dot{x}_i^2 \right). \end{aligned}$$

После преобразований левая часть равенства (2.2) представится в виде

$$\begin{aligned} & \sum_i m_i \left( \ddot{x}_i \frac{\partial f_i}{\partial q_k} + \ddot{y}_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_k} + \ddot{z}_i \frac{\partial \psi_i}{\partial q_k} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) \right] - \frac{1}{2} \sum_i m_i \frac{\partial}{\partial q_k} (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) = \\ &= \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left[ \frac{1}{2} \sum_i m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) \right] \right\} - \frac{\partial}{\partial q_k} \left[ \frac{1}{2} \sum_i m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) \right]. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Выражение

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) \quad (2.4)$$

определяет кинетическую энергию системы, состоящей из материальных точек  $m_i$ . Структура исследуемой системы всегда известна, и поэтому кинетическую энергию можно выразить в виде функции координат  $q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t$ , т. е.

$$T = T(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t).$$

Эту функцию можно представить в конкретной форме, учитывая, что

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \frac{\partial f_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial f_i}{\partial t}; \\ \dot{y}_i &= \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial \varphi_i}{\partial t}; \\ \dot{z}_i &= \frac{\partial \psi_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial \psi_i}{\partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial \psi_i}{\partial t}, \end{aligned}$$

т. е.  $\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i$  являются линейными функциями от  $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$ . Отсюда следует, что функция  $T$ , определяемая по формуле (2.4), есть квадратичная функция от  $q_1, \dots, q_n$ . Действительно, для голономной системы со стационарными связями, имеющей  $n$  степеней свободы, радиус-вектор любой точки системы является функцией обобщенных координат этой системы:  $\rho_i = \rho_i(q_1, \dots, q_n)$ , следовательно, скорость каждой точки системы равна

$$v_i = \frac{d\rho_i}{dt} = \frac{\partial \rho_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial \rho_i}{\partial q_n} \dot{q}_n.$$

Кинетическая энергия рассматриваемой системы выражается формулой

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2,$$

и поэтому имеем

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \left[ \left( \frac{\partial \rho_i}{\partial q_1} \right)^2 \dot{q}_1^2 + \dots + \left( \frac{\partial \rho_i}{\partial q_n} \right)^2 \dot{q}_n^2 + \right. \\ &\left. + 2 \frac{\partial \rho_i}{\partial q_1} \frac{\partial \rho_i}{\partial q_2} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dots + 2 \frac{\partial \rho_i}{\partial q_{n-1}} \frac{\partial \rho_i}{\partial q_n} \dot{q}_{n-1} \dot{q}_n \right]. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что кинетическая энергия системы есть однородная квадратичная функция обобщенных скоростей  $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$  с коэффициентами, являющимися функциями обобщенных координат, т. е.

$$T = \frac{1}{2} \left[ M_{11} \dot{q}_1^2 + \dots + M_{nn} \dot{q}_n^2 + 2M_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dots + 2M_{n-1, n} \dot{q}_{n-1} \dot{q}_n \right], \quad (2.5)$$

где  $M_{nn} = \sum_i m_i \left( \frac{\partial \rho_i}{\partial q_n} \right)^2$ ;  $M_{n-1, n} = \sum_i m_i \frac{\partial \rho_i}{\partial q_{n-1}} \cdot \frac{\partial \rho_i}{\partial q_n}$ .

Разлагая каждый из коэффициентов в ряд Маклорена по степеням обобщенных координат, получаем

$$M_{ik}(q_1, \dots, q_n) = (M_{ik})_0 + \sum_k \left( \frac{\partial M_{ik}}{\partial q_k} \right)_0 q_j + \dots$$

При исследовании малых отклонений системы от положения равновесия в этом равенстве ограничиваются первыми, постоянными членами, которые называются коэффициентами инерции и обозначаются следующим образом

$$(M_{ik})_0 = M_{ik}(0, \dots, 0) = i_{ik}.$$

Тогда на основании формулы (2.5) величина кинетической энергии может быть определена в виде

$$T = \frac{1}{2} \sum_i \sum_k i_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k, \quad (2.6)$$

что означает суммирование по всем координатам и по всем материальным точкам системы, имеющим коэффициенты инерции  $i_{ik}$ . Величина  $T$  определяется здесь с точностью до величин второго порядка малости.

Возвращаясь к уравнению движения (2.2) и производя соответствующую подстановку (2.4) в формулу (2.3), имеем

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = \sum_i \left( X_i \frac{\partial f_i}{\partial q_k} + Y_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_k} + Z_i \frac{\partial \psi_i}{\partial q_k} \right). \quad (2.7)$$

Преобразование правой части уравнения осуществляется следующим образом. Если система материальных точек получила перемещение и координата  $q_k$  принимает значение  $q_k + \delta q_k$ , а остальные координаты остаются неизменными и связи в системе, в силу ее голономности, не нарушаются, то координаты точки принимают значения

$$x_i + \frac{\partial f_i}{\partial q_k} \delta q_k, \quad y_i + \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_k} \delta q_k, \quad z_i + \frac{\partial \psi_i}{\partial q_k} \delta q_k$$

и работа всех сил, действующих на все точки системы, равна

$$\sum_i \left( X_i \frac{\partial f_i}{\partial q_k} + Y_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_k} + Z_i \frac{\partial \psi_i}{\partial q_k} \right) \delta q_k.$$

Все силы, приложенные к системе материальных точек и производящие работу, в аналитической динамике называются внешними силами. Поэтому последнее выражение представляет собой сумму работ внешних сил при перемещении системы.

Так как структура исследуемой системы и приложенные силы известны, суммарная работа этих сил может быть определена в виде функции

$$\Lambda(q_1, \dots, q_n, t) \delta q_k. \quad (2.8)$$

Тогда дифференциальные уравнения системы материальных точек могут быть записаны в виде системы уравнений движения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = \Lambda \quad (k = 1, \dots, n). \quad (2.9)$$

Внешние силы, действующие на систему, могут быть консервативными и неконсервативными.

Работа консервативных сил при перемещении точек системы из конфигурации  $(q_{10}, \dots, q_{n0})$  в основную конфигурацию  $(q_1, \dots, q_n)$  является функцией от этих координат, независимой от вида перемещения. Примером может служить работа силы тяжести при перемещении точки массой  $m$  из положения, определяемое высотой  $h_0$ , в положение с высотой  $h_q$ , величина которой  $mg(h_q - h_0)$  не зависит от пути перемещения.

Функция работы подобных консервативных сил называется потенциальной энергией системы в конфигурации  $(q_1, \dots, q_n)$  и обозначается

$$V(q_1, \dots, q_n).$$

При бесконечно малом перемещении системы, определяемом приращениями координат  $\delta q_1, \dots, \delta q_n$ , в основную конфигурацию работа внешних сил равна бесконечно малому уменьшению функции  $V$

$$-\frac{\partial V}{\partial q_1} \delta q_1, \dots, -\frac{\partial V}{\partial q_n} \delta q_n,$$

и тогда уравнения Лагранжа для системы, внешние силы которой являются консервативными, принимают вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = -\frac{\partial V}{\partial q_k}, \quad (2.10)$$

где потенциальная функция может быть определена с точностью до величин второго порядка малости в виде

$$V(q_1, \dots, q_n) = \frac{1}{2} \sum_i \sum_k C_{ik} q_i q_k. \quad (2.11)$$

Здесь  $C_{ik} = C_{ki} = \left( \frac{\partial V}{\partial q_i \partial q_k} \right)_0$  – коэффициенты жесткости связей в системе.

В некоторых случаях появляется возможность ввести потенциальную функцию  $V$  и для таких динамических систем, у которых действующие силы  $\Lambda$  зависят не только от значения координат, но и от скоростей и ускорений.

Если величина  $\Lambda$  может быть представлена в виде

$$\Lambda = -\frac{\partial V}{\partial q_k} + \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k}, \quad (2.12)$$

где  $V = V(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$ , то уравнения Лагранжа принимают вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = -\frac{\partial V}{\partial q_k} + \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k}. \quad (2.13)$$

Лагранж ввел функцию

$$L = T - V, \quad (2.14)$$

названную им кинетическим потенциалом системы, которая позволяет уравнение движения (2.13) представить в форме

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0. \quad (2.15)$$

Следовательно, динамическое состояние системы материальных точек, подвергнутой действию консервативных сил (т. е. сил, для которых справедлив закон сохранения энергии) и имеющей возможность перемещаться при любом бесконечно малом изменении координат, полностью характеризуется кинетическим потенциалом системы.

В консервативных системах, связи между точками которых не зависят от времени, сумма кинетической и потенциальной энергии есть постоянная величина, называемая полной энергией и выражающая закон сохранения энергии в подобных системах. Но имеются такие динамические системы материальных точек, для которых указанный закон сохранения энергии не соблюдается, и часть ее при движении системы переходит в другие виды энергии. Примером может служить превращение механической энергии в тепловую.

Системы, обладающие подобным свойством, называются диссипативными системами или системами с рассеиванием энергии. Рассеивание энергии связано с трением, которое пропорционально скорости перемещения точек системы.

Уравнение движения Лагранжа для диссипативных систем имеет вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_k} = 0, \quad (2.16)$$

где  $F = \frac{1}{2} \sum_i (v_x \dot{x}_i^2 + v_y \dot{y}_i^2 + v_z \dot{z}_i^2)$  – функция рассеивания энергии для всех точек системы, называемая диссипативной функцией Рэля ( $v_x, v_y, v_z$  – коэффициенты пропорциональности).

По аналогии с выражением для кинетической энергии диссипативная функция записывается в координатах конфигурации

$$F = \frac{1}{2} \sum_i \sum_k d_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k, \quad (2.17)$$

где  $d_{ik}$  – коэффициенты рассеивания энергии при действии сил сопротивления.

Практика применения уравнения движения Лагранжа к электромеханическим системам показывает, что уравнение целесообразно записывать в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_k} = \Lambda, \quad (2.18)$$

где  $\Lambda$  – обобщенные сторонние силы, воздействующие на систему.

При поиске кинетического потенциала структуры системы можно установить факт существования или отсутствия зависимости потенциальной функции не только от значения координат, но и от скоростей и ускорений.

Характер движения системы, динамическое равновесие которой описывается уравнением Лагранжа, будет зависеть от действия обобщенной результирующей силы. Если последняя отсутствует, то система находится или в состоянии движения под действием ранее прикладывавшихся сил, или в состоянии установившегося равновесия.

Распространяя положения аналитической динамики на электромеханическую систему в виде синхронного генератора, приводимого во вращение двигателем, необходимо исследовать электромагнитное равновесие системы, обусловленное наличием контуров с электрическими токами, и электромеханическое равновесие, обусловленное проявлением энергии двигателя генератора.

Динамическое состояние всей системы в целом, рассматриваемой в качестве голономной системы, предоставленной самой себе (т. е. без учета действия внешних сил), может быть охарактеризовано кинетическим потенциалом  $L = \sum T - \sum V$ , который будет определять кинетические и потенциальные энергии отдельных частей системы.

Структура исследуемой системы позволяет разделить ее на три взаимосвязанные части: электрическую, представляемую электриче-

скими контурами обмоток с внешними ЭДС, электромагнитную (или электродинамическую), представляемую электромагнитными полями указанных контуров, и механическую, представляемую вращающимся ротором генератора и вращающимися частями его двигателя. Очевидно, суммы кинетических и потенциальных энергий будут содержать соответствующие количества энергии в электрической, электромагнитной и механической частях системы

$$\sum T = T_i + T_e + T_m \quad \text{и} \quad \sum V = V_i + V_e + V_m.$$

Выбор координат исследуемой системы по ее структуре определит значения этих величин.

Если геометрические обобщенные координаты системы суть  $q_1, \dots, q_m$ , а электрические  $q_j, \dots, q_n$ , то все возможные движения в генераторном агрегате будут описываться  $m+n$  уравнениями Лагранжа. В правых частях этих уравнений будут располагаться обобщенные силы, которые в данном случае представятся электродвижущими силами в контурах обмоток и вращающимися моментами, приложенными к валу ротора агрегата.

Электромагнитное состояние синхронной машины определяется шестью обобщенными координатами  $q_a, q_b, q_c, q_r, q_{rd}, q_{rq}$ , характеризующими количество протекшего электричества в шести контурах машины: в трех фазах статорной обмотки ( $a, b, c$ ), в обмотке ротора ( $r$ ) и в демпферной обмотке – в продольном ( $rd$ ) и поперечном ( $rq$ ) контурах.

Электромагнитная энергия контуров с током определяется формулой

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_j \psi_j i_j = \frac{1}{2} \sum_j \sum_k L_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k \quad (j, k = a, \dots, rq), \quad (2.19)$$

где

$$\psi_j = \sum_k L_{jk} i_k = \sum_k L_{jk} \dot{q}_k, \quad (2.20)$$

$\psi_j$  – потокосцепления контуров синхронной машины;  $i_k$  – сила тока в  $k$ -м контуре;  $L_{jk}$  – коэффициенты электромагнитной самоиндукции и взаимной индукции контуров.

Электромагнитная энергия, как видно из формулы (2.19), является однородной квадратичной функцией контурных токов, и, следовательно, по теореме Эйлера имеет место равенство

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_j \frac{\partial W_e}{\partial i_j} i_j. \quad (2.21)$$



Тождественность этой формулы с выражением (2.19) определяет соотношение

$$\frac{\partial W_e}{\partial i_j} = \Psi_j. \quad (2.22)$$

Теперь следует найти обобщенные силы  $\Lambda$  электрических контуров, пренебрегая незначительным емкостным эффектом в них.

Если омические сопротивления контуров равны  $R_{jk}$ , а приложенные напряжения  $U_j$ , то работа напряжений в элемент времени  $dt$  с учетом потерь энергии на джоулево тепло в контурах определится выражением

$$\sum_j U_j i_j dt - \sum_j \sum_k R_{jk} i_j i_k dt$$

или

$$\sum_j \left( U_j - \sum_k R_{jk} i_k \right) dq_j.$$

Это выражение представляет собой работу обобщенных неконсервативных сил в электрической части системы  $\Lambda_{\text{ЭДС}}$  и, следовательно, можно написать выражение для обобщенных сил в виде

$$\Lambda_{\text{ЭДС}} = U_j - \sum_k R_{jk} \dot{q}_k.$$

Подставляя полученные выражения электромагнитной энергии (2.22) и  $\Lambda_{\text{ЭДС}}$  в уравнение движения Лагранжа (2.9), имеем

$$\frac{d\psi_j}{dt} = U_j - \sum_k R_{jk} \dot{q}_k. \quad (2.23)$$

Эти уравнения движения Лагранжа для электрической части системы адекватны уравнениям равновесия электродвижущих сил в пяти ( $j = a, \dots, r, q$ ) контурах машины. На основе теории двух реакций Блонделя они преобразуются в дифференциальные уравнения синхронной машины Парка–Горева.

## § 2.2. Уравнения Парка–Горева

В соответствии с уравнениями Лагранжа (2.23) для контуров обмоток синхронной машины можно записать систему уравнений, в которой первое уравнение дано для трех фаз обмоток статора, второе – для обмотки возбуждения, третье и четвертое – для обмоток демпферных контуров

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\psi_k}{dt} + r_k i_k &= -u_k, \quad k = a, b, c; \\ \frac{d\psi_B}{dt} + r_B i_B &= u_B; \\ \frac{d\psi_{rd}}{dt} + r_{rd} i_{rd} &= 0, \\ \frac{d\psi_{rq}}{dt} + r_{rq} i_{rq} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

Потокосцепление контура фазы «а» состоит из составляющих потокосцеплений вышеуказанных шести контуров машины, а именно:

$$\psi_a = L_a i_a + L_{ab} i_b + L_{ac} i_c + L_{aB} i_B + L_{ard} i_{rd} + L_{arq} i_{rq}, \quad (2.25)$$

где  $L_a$  – коэффициент самоиндукции обмотки фазы «а» статора машины;  $L_{ab}, L_{ac}, L_{aB}, L_{ard}, L_{arq}$  – соответственно коэффициенты взаимной индукции обмотки фазы «а» с обмотками фаз «b», «с», с обмоткой возбуждения и с продольным и поперечным контурами демпферной обмотки.

Аналогичные зависимости будут для потокосцеплений фаз «b», и «с» обмотки статора.

Токи в фазах  $i_a, i_b, i_c$  могут быть выражены через токи продольного и поперечного контуров статора  $i_d, i_q$  (см. рис. 1.2)

$$\left. \begin{aligned} i_a &= i_d \cos \gamma + i_q \sin \gamma; \\ i_b &= i_d \cos \left( \gamma - \frac{2\pi}{3} \right) + i_q \sin \left( \gamma - \frac{2\pi}{3} \right); \\ i_c &= i_d \cos \left( \gamma + \frac{2\pi}{3} \right) + i_q \sin \left( \gamma + \frac{2\pi}{3} \right). \end{aligned} \right\} \quad (2.26)$$

Также напряжения – через продольную  $u_{cd}$  и поперечную  $u_{cq}$  составляющие

$$\left. \begin{aligned} u_a &= u_{cd} \cos \gamma + u_{cq} \sin \gamma; \\ u_b &= u_{cd} \cos \left( \gamma - \frac{2\pi}{3} \right) + u_{cq} \sin \left( \gamma - \frac{2\pi}{3} \right); \\ u_c &= u_{cd} \cos \left( \gamma + \frac{2\pi}{3} \right) + u_{cq} \sin \left( \gamma + \frac{2\pi}{3} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.27)$$

и по аналогии потокосцепления в фазах

$$\left. \begin{aligned} \psi_a &= \psi_d \cos \gamma + \psi_q \sin \gamma; \\ \psi_b &= \psi_d \cos \left( \gamma - \frac{2\pi}{3} \right) + \psi_q \sin \left( \gamma - \frac{2\pi}{3} \right); \\ \psi_c &= \psi_d \cos \left( \gamma + \frac{2\pi}{3} \right) + \psi_q \sin \left( \gamma + \frac{2\pi}{3} \right), \end{aligned} \right\} \quad (2.28)$$

где потокосцепления продольного и поперечного контуров машины равны

$$\left. \begin{aligned} \psi_d &= L_d i_d + M_d i_b + M_{rd} i_{rd}; \\ \psi_q &= L_q i_q + M_{rq} i_{rq}. \end{aligned} \right\} \quad (2.29)$$

Производные потокосцеплений по времени из (2.28) для подстановки в уравнения (2.24) имеют вид

$$\frac{d\psi_a}{dt} = -\psi_d \sin \gamma \frac{d\gamma}{dt} + \cos \gamma \frac{d\psi_d}{dt} + \psi_q \cos \gamma \frac{d\gamma}{dt} + \sin \gamma \frac{d\psi_q}{dt}. \quad (2.30)$$

После подстановки (2.30) и (2.26), (2.27) в первое дифференциальное уравнение (2.24) для фазы «а» имеем

$$\left( -\psi_d \frac{d\gamma}{dt} + \frac{d\psi_q}{dt} \right) \sin \gamma + \left( \psi_q \frac{d\gamma}{dt} + \frac{d\psi_d}{dt} \right) \cos \gamma + r_a (i_q \sin \gamma + i_d \cos \gamma) = - (u_{cd} \cos \gamma + u_{cq} \sin \gamma)$$

или

$$\left( \frac{d\psi_d}{dt} + \psi_q \frac{d\gamma}{dt} + r_a i_d + u_{cd} \right) \cos \gamma + \left( \frac{d\psi_q}{dt} - \psi_d \frac{d\gamma}{dt} + r_a i_q + u_{cq} \right) \sin \gamma = 0.$$

Это равенство справедливо для любого момента времени при любом значении угла  $\gamma$ , а следовательно, чтобы оно удовлетворялось, коэффициенты в круглых скобках при  $\cos \gamma$  и  $\sin \gamma$  должны быть равны нулю.

Тогда получаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Psi_d}{dt} + \Psi_q \frac{d\gamma}{dt} + r_a i_d &= -u_{cd}; \\ \frac{d\Psi_q}{dt} - \Psi_d \frac{d\gamma}{dt} + r_a i_q &= -u_{cq}, \end{aligned} \right\} \quad (2.31)$$

где потокосцепления  $\Psi_d$  и  $\Psi_q$  определяются выражениями (2.29). После подстановки последних в (2.31) имеем

$$\left. \begin{aligned} L_d \frac{di_d}{dt} + M_d \frac{di_b}{dt} + M_{rd} \frac{di_{rd}}{dt} + L_q i_q \frac{d\gamma}{dt} + M_{rq} i_{rq} \frac{d\gamma}{dt} + r_a i_d &= -u_{cd}; \\ L_q \frac{di_q}{dt} + M_{rq} \frac{di_{rq}}{dt} - (L_d i_d + M_d i_b + M_{rd} i_{rd}) \frac{d\gamma}{dt} + r_a i_q &= -u_{cq}. \end{aligned} \right\} \quad (2.32)$$

При изменении скорости вращения поля  $\omega_c$  угол  $\gamma$  будет изменяться (рис. 2.1) и если ввести параметр  $s$  – скольжение ротора относительно оси поля статора

$$s = \frac{\omega_p - \omega_c}{\omega_c}$$

и учесть, что  $\omega_p = \frac{d\gamma}{dt}$ , то имеем  $\frac{d\gamma}{dt} = (1 + s)\omega_c$ .

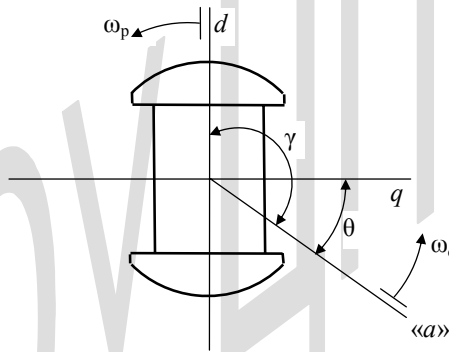


Рис. 2.1. Положение ротора и синхронной оси магнитного поля статора

Теперь, умножая левые члены первого уравнения (2.32) на  $\frac{\omega_c}{\omega_c}$ ,

можно получить их в таком виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\omega_c L_d}{\omega_c} \frac{di_d}{dt} &= x_d \frac{di_d}{d(\omega_c t)} = \frac{d(x_d i_d)}{d(\omega_c t)} = p u_d; \\ \frac{\omega_c M_d}{\omega_c} \frac{di_b}{dt} &= \frac{d(\omega_c M_d i_b)}{d(\omega_c t)} = p e_q; \\ \frac{\omega_c M_{rd}}{\omega_c} \frac{di_{rd}}{dt} &= \frac{d(\omega_c M_{rd} i_{rd})}{d(\omega_c t)} = p u_{rd}; \\ \frac{\omega_c L_q}{\omega_c} i_q \frac{d\gamma}{dt} &= x_q i_q \frac{d\gamma}{d(\omega_c t)} = u_q (1+s); \\ \frac{\omega_c M_{rq}}{\omega_c} i_{rq} \frac{d\gamma}{dt} &= u_{rq} (1+s); \\ \frac{\omega_c}{\omega_c} r_a i_d &= \frac{\omega_c L_d}{\omega_c L_d} r_a i_d = \frac{r_a}{\omega_c L_d} u_d = \rho_d u_d. \end{aligned} \right\} (2.33)$$

где  $p = \frac{d}{d(\omega_c t)}$  – оператор дифференцирования по синхронному времени.

Подобные зависимости получаются и для левых членов второго уравнения (2.32). Таким же образом преобразуются уравнения (2.24) для обмотки возбуждения и для демпферных контуров.

В итоге имеем дифференциальные уравнения Парка–Горева [1, 2]:

$$\left. \begin{aligned} (\rho_d + p)u_d + (1+s)u_q + p e_q + p u_{rd} + (1+s)u_{rq} &= -u_{cd}; \\ -(1+s)u_d + (\rho_q + p)u_q - (1+s)e_q - (1+s)u_{rd} + p u_{rq} &= -u_{cq}; \\ \mu_d p u_d + (\rho_r + p)e_q + g_1 p u_{rd} &= \rho_r u_b; \\ \mu'_d p u_d + g_2 p e_q + (\rho_{rd} + p)u_{rd} &= 0; \\ \mu_q p u_q + (\rho_{rq} + p)u_{rq} &= 0, \end{aligned} \right\} (2.34)$$

где  $u_{cd} = u_c \sin \theta$ ,  $u_{cq} = u_c \cos \theta$ ,

$u_c, u_b$  – напряжение на фазах обмотки статора и на обмотке ротора;  
 $u_{cd}, u_{cq}$  – напряжение сети, приложенное к продольному и поперечному контурам обмотки статора;  $u_d = \omega_c L_d i_d$ ,  $u_q = \omega_c L_q i_q$ ,  $u_{rd} = \omega_c M'_{rd} i_{rd}$ ,  
 $u_{rq} = \omega_c M_{rq} i_{rq}$  – напряжение на индуктивных сопротивлениях в продольном и поперечном контурах статорной и демпферной обмоток машины;  $\rho_d = \frac{r_a}{\omega_c L_d}$ ,  $\rho_q = \frac{r_a}{\omega_c L_q}$ ,  $\rho_r = \frac{r_r}{\omega_c L_r}$ ,  $\rho_{rd} = \frac{r_{rd}}{\omega_c L_{rd}}$ ,  $\rho_{rq} = \frac{r_{rq}}{\omega_c L_{rq}}$  – декременты продольных и поперечных контуров обмоток;

$g_1 = \sqrt{\frac{\mu_d \mu_a}{\mu_d'}}$ ,  $g_2 = \sqrt{\frac{\mu_d' \mu_a}{\mu_d}}$  – коэффициенты относительной взаимои-

дукции;  $\mu_d = \frac{3}{2} \frac{M_d^2}{L_d L_r}$ ,  $\mu_d' = \frac{3}{2} \frac{M_{rd}^2}{L_d L_{rd}}$ ,  $\mu_q = \frac{3}{2} \frac{M_{rq}^2}{L_q L_{rq}}$ ,  $\mu_a = \frac{M_{rd}}{L_r L_{rd}}$  – ко-

эффициенты магнитной связи соответственно фаз обмоток статора с обмоткой возбуждения, фаз обмоток статора с демпферным продольным контуром, фаз обмоток статора с демпферным поперечным контуром и обмотки возбуждения с демпферным продольным контуром;  $M_d$ ,  $M_q$ ,  $M_{rd}$ ,  $M_{rd}$  – коэффициенты взаимоииндукции продольного и поперечного контуров обмотки ротора с контурами фаз обмотки статора, продольных контуров обмотки статора и демпферной обмотки, продольного демпферного контура с обмоткой возбуждения;  $i_d$ ,  $i_q$ ,  $i_{rd}$ ,  $i_{rq}$  – составляющие токов в продольном и поперечном контурах статорной и демпферной обмоток;  $L_d$ ,  $L_q$ ,  $L_r$ ,  $L_{rd}$ ,  $L_{rq}$  – коэффициенты самоиндукции продольного и поперечного контуров обмотки статора, обмотки ротора, продольного и поперечного контуров демпферной обмотки;  $r_a$ ,  $r_r$ ,  $r_{rd}$ ,  $r_{rq}$  – активные сопротивления фазы обмотки статора, ротора, продольного и поперечного контуров демпферной обмотки.

При исследовании устойчивости параллельной работы, втягивания в синхронизм, малых колебаний, то есть тех режимов, в которых движение ротора машины происходит в области, близкой к его установившемуся движению, уравнения Парка–Горева могут быть использованы в представленном виде. Но в электроэнергетических установках имеют место и переходные режимы, сопровождающиеся значительными колебаниями напряжения и частоты в сети. Сложность исследования таких режимов приводит к необходимости вводить дополнительные ограничения в характеристики машин и устройств для преодоления затруднений, возникающих при математическом описании и решении поставленных задач.

Система уравнений переходного процесса синхронного агрегата, которая включает в себя все уравнения Парка–Горева синхронной машины, уравнения энергетического двигателя и их автоматических регуляторов напряжения и частоты, может быть решена только при помощи вычислительных машин и принятых моделей элементов энергосистем и достоверность результата будет зависеть от правильности исходных данных.

Как показывают экспериментальные исследования, физические процессы в реальных электрических и энергетических машинах определяются, как правило, несколькими основными параметрами, остальные же параметры оказывают несущественное влияние. Поэтому постановка физической задачи в простой математической формулировке позволяет непосредственно изучать физический процесс, его особенности и, главное, установить при этом взаимосвязь явлений и параметров.

Переходные процессы в синхронном генераторном агрегате, являющемся электромеханической системой, взаимосвязаны, и в общем случае анализа должны одновременно рассматриваться и электромагнитные, и электромеханические, и механические процессы, однако по изложенным причинам эти процессы изучаются отдельно с последующим установлением взаимосвязи между ними.

Рассматривая переходный процесс генератора при резком и значительном изменении реактивной нагрузки, когда магнитные потоки в машине также претерпевают значительные изменения, можно установить, что в данном случае решающее влияние на процесс оказывает обмотка ротора генератора. Поэтому в соответствии с динамическими свойствами машины, изменение потокоцеплений в машине будет определяться параметрами обмоток ротора и статора, но с условием, что потокоцепления статорной обмотки, как принимается С.А. Лебедевым и П.С. Ждановым [3], могут свободно изменяться. Это означает пренебрежение постоянной времени статорной обмотки.

В ряде случаев демпферная обмотка по той же причине не оказывает существенного влияния на исследуемый процесс, и потому этим влиянием в первом приближении можно пренебречь.

Пренебрежение влиянием демпферной обмотки выражается нулевыми значениями параметров:  $u_{rd} = 0$ ,  $u_{rq} = 0$ ,  $M'_{rd} = 0$ ,  $M_{rq} = 0$ ,  $M_{rd} = 0$ .

При малых значениях активного сопротивления обмотки статора  $r_a = 0$  имеет место  $\rho_d = 0$ ,  $\rho_q = 0$  и при постоянной синхронной скорости вращения  $s = 0$ .

Изложенные выше ограничения, налагаемые на характеристики синхронной машины, позволяют при исследовании электромагнитного процесса обратиться только к третьему уравнению Парка–Горева

$$\mu_d p u_d + (\rho_r + p) e_q = \rho_r u_b,$$

которое после подстановки значений коэффициентов примет вид

$$\frac{d}{d(\omega_c t)} (\mu_d x_d i_d + e_q) = \frac{r_r}{\omega_c L_r} (u_b - e_q),$$

или, учитывая, что  $\mu_d = 1 - \sigma = 1 - \frac{x'_d}{x_d}$ , имеем

$$\frac{d}{dt}[-(x_d - x'_d)i_d + e_q] = \frac{r_r}{L_r}(u_b - e_q). \quad (2.35)$$

Величина в квадратных скобках, как видно из векторной диаграммы рис. 1.3, является ЭДС за переходным продольным сопротивлением машины,  $e'_q$ , а  $r_r L_r^{-1} = T_{d0}^{-1}$  – постоянная времени обмотки возбуждения при разомкнутой обмотке статора.

Из этого выражения можно получить формулу для расчета изменения напряжения генератора при его автономной работе.

Связь между напряжением на зажимах машины и ее ЭДС в любой момент времени может быть установлена при помощи формул (1.2), (1.3), (1.21), (1.22).

Используя эти зависимости, можно получить из (2.35) основное уравнение для электромагнитного переходного процесса генератора, определяющее изменение его напряжения во времени [41],

$$\frac{dU}{dt} + k_2 U = k_1 [U_b(t) - U_{в.нас}], \quad (2.36)$$

где  $U_b(t)$  – зависимость изменения возбуждения генератора под действием автоматической системы регулирования напряжения с начала нарушения режима генератора;  $U_{в.нас}$  – часть напряжения возбуждения, необходимая для «преодоления» насыщения стали,

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= \frac{\xi'}{T_{d0}}, & k_2 &= \frac{\xi'}{\xi T_{d0}} & - & \text{для явнополюсного генератора;} \\ k_1 &= \frac{\zeta'}{T_{d0}}, & k_2 &= \frac{\zeta'}{\zeta T_{d0}} & - & \text{для неявнополюсного генератора} \end{aligned} \right\} \quad (2.37)$$

Влияние насыщения следует учитывать при исследовании режима отключения индуктивной нагрузки (или включения емкостной). При расчете режима включения индуктивной нагрузки им можно пренебречь с тем большим основанием, чем больше величина этой нагрузки.

Коэффициенты  $k_2$  в формулах (2.37) представляют собой величину, обратную постоянной времени обмотки возбуждения генератора при замкнутой (на сопротивление нагрузки) обмотке статора. Эта постоянная времени определяется соответственно для явнополюсного и неявнополюсного генераторов следующими формулами – см. (1.4), (1.22):



$$\left. \begin{aligned} T'_d &= \frac{x'_{dн}x_{qн} + r_{dн}^2}{x_{dн}x_{qн} + r_{dн}^2} T_{d0} = \frac{\xi}{\xi'} T_{d0}; \\ T'_d &= \frac{x'_{dн}x_{dн} + r_{dн}^2}{x_{dн}^2 + r_{dн}^2} T_{d0} = \frac{\zeta}{\zeta'} T_{d0}. \end{aligned} \right| \quad (2.38)$$

Полученное уравнение описывает переходный процесс генератора при постоянной скорости вращения для случая внезапного включения любого вида нагрузки величиной  $z_n$ , остающейся постоянной в течение всего процесса.

В первый момент нарушения режима напряжение и ток в цепи статора соответственно явноплюсового и неявноплюсового генераторов определяются так

$$\left. \begin{aligned} U_0 &= \xi' E'_q; \quad U_0 = \zeta' E'_q; \\ I_0 &= \frac{\xi'}{z_n} E'_q; \quad I_0 = \frac{\zeta'}{z_n} E'_q, \end{aligned} \right| \quad (2.39)$$

где  $E'_q = 1$ , если нагрузка включалась на ненагруженный генератор, и  $E'_q = \frac{1}{\xi'_n}$  или  $E'_q = \frac{1}{\zeta'_n}$ , если генератор имел предварительную нагрузку и его напряжение поддерживалось номинальным; коэффициенты  $\xi'$ ,  $\zeta'$  вычисляются по формулам (1.23) для параметров предварительной нагрузки.

Значения напряжения и тока, определяемые по формулам (2.39), являются начальными условиями основного уравнения.

Если в первый момент нарушения режима изменение напряжения и тока определяется параметрами нагрузки и генератора, то их последующее изменение зависит от величины тока возбуждения генератора и его скорости вращения. Учет влияния этих факторов на переходный процесс имеет существенное значение.

### § 2.3. Уравнения движения Лагранжа для синхронной машины, ее кинетическая, потенциальная энергия и диссипативная функция

Момент сил взаимодействия магнитных полей обмоток статора и ротора определяется выражением

$$M_{\text{эл}} = \frac{\partial T_e}{\partial \gamma}, \quad (2.40)$$

где  $T_e$  – энергия магнитных полей обмоток;  $\gamma$  – угол поворота ротора.

Энергия магнитных полей синхронной машины, в свою очередь, определяется так

$$T_e = \frac{1}{2} \sum \Psi_k i_k, \quad (2.41)$$

где  $\Psi_k, i_k$  – соответственно потокосцепления и токи всех шести контуров машины.

Для получения зависимости  $T_e$  от потокосцеплений и токов в продольной и поперечной осях машины следует подставить в (2.41) выражения для потокосцеплений трех фаз (2.28), (2.29) и выражения для токов (2.26).

После подстановки и преобразований получаем

$$\begin{aligned} 2T_e = & \frac{3}{2} L_d i_d^2 + 3M_d i_d i_b + 3M_{rd} i_{rd} i_d + L_b i_b^2 + 2L_{rd} i_{rd} i_b + \\ & + L_{rd} i_{rd}^2 + \frac{3}{2} L_q i_q^2 + 3M_{rq} i_q i_{rq} + L_{rq} i_{rq}^2. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Выражение для электромагнитного момента определяется вычислением частной производной (2.40) с учетом зависимости токов  $i_d, i_q$  от угла  $\gamma$ , т. е.

$$\frac{\partial T_e}{\partial \gamma} = \frac{\partial T_e}{\partial i_d} \frac{di_d}{d\gamma} + \frac{\partial T_e}{\partial i_q} \frac{di_q}{d\gamma} = -i_q \frac{\partial T_e}{\partial i_d} + i_d \frac{\partial T_e}{\partial i_q}, \quad (2.43)$$

где зависимости

$$\frac{di_d}{d\gamma} = -i_q, \quad \frac{di_q}{d\gamma} = i_d \quad (2.44)$$

получены дифференцированием выражений для токов

$$\left. \begin{aligned} i_d &= \frac{2}{3} \left[ i_a \cos \gamma + i_b \cos \left( \gamma - \frac{2\pi}{3} \right) + i_c \cos \left( \gamma + \frac{2\pi}{3} \right) \right]; \\ i_q &= \frac{2}{3} \left[ i_a \sin \gamma + i_b \sin \left( \gamma - \frac{2\pi}{3} \right) + i_c \sin \left( \gamma + \frac{2\pi}{3} \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (2.45)$$

Составляющие формулы (2.43) получаются, в свою очередь, дифференцированием (2.42) по  $i_d$  и  $i_q$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T_e}{\partial i_d} &= \frac{3}{2} (L_d i_d + M_d i_b + M_{rd} i_{rd}); \\ \frac{\partial T_e}{\partial i_q} &= \frac{3}{2} (L_q i_q + M_{rq} i_{rq}). \end{aligned} \right\} \quad (2.46)$$

После подстановки в эти формулы зависимостей (2.29) имеем

$$\frac{\partial T_e}{\partial i_d} = \frac{3}{2} \Psi_d, \quad \frac{\partial T_e}{\partial i_q} = \frac{3}{2} \Psi_q$$

и тогда по формулам (2.40) и (2.43) получаем

$$M_{эл} = \frac{\partial T_e}{\partial \gamma} = -\frac{3}{2} \Psi_d i_q + \frac{3}{2} \Psi_q i_d = -\frac{3}{2} (\Psi_d i_q - \Psi_q i_d).$$

После деления на единицу мощности  $\frac{3}{2} ui$  это уравнение в относительных единицах с подстановкой (2.29) окончательно запишем

$$M_{эл} = - \left[ (u_d + e_q + u_{rd}) \frac{u_q}{x_q} - (u_q + u_{rq}) \frac{u_d}{x_d} \right], \quad (2.47)$$

где обозначено  $u_d = \omega_c L_d i_d$ ;  $u_q = \omega_c L_q i_q$ ;  $e_q = \omega_c M_d i_b$ ;  $u_{rd} = \omega_c M_{rd} i_{rd}$ ;

$$u_{rq} = \omega_c M_{rq} i_{rq}; \quad \frac{u_q}{x_q} = i_q; \quad \frac{u_d}{x_d} = i_d.$$

Электромеханическое равновесие в синхронном агрегате зависит от вращающих моментов, обусловленных электродинамическим взаимодействием контуров статора и ротора. Обобщенной координатой может служить угол поворота вала ротора  $\gamma$ , отсчитываемый от оси, вращающейся в пространстве с синхронной скоростью.

Определение кинетического потенциала этой части системы непосредственно из ее структуры сопряжено с большими затруднениями. Данная задача может быть просто решена при помощи указанных выше уравнений Парка–Горева для синхронной машины. Этот способ целесообразен и потому, что все конструктивные параметры машины в ее технической характеристике содержатся в коэффициентах уравнений Парка–Горева.

Динамическое равновесие синхронной машины, у которой статорная обмотка включена на симметричное напряжение сети, а к валу ротора приложен вращающий момент, будет описано в уравнениях Парка–Горева, в соответствии со вторым законом Ньютона, так

$$J_c \ddot{\theta} + \left[ (u_d + e_q + u_{rd}) \frac{u_q}{x_q} - (u_q + u_{rq}) \frac{u_d}{x_d} \right] = M_{д.с}, \quad (2.48)$$

где  $J_c = \frac{J}{M_c}$ ,  $M_{д.с} = \frac{M_{д.}}{M_c}$  – соответственно момент инерции вращающихся вместе с валом частей агрегата и вращающий момент на валу двигателя, приведенные к системе единиц, в которой за единицу мощности принята величина  $S = \frac{3}{2} U_a I_a = M_c \omega_c$ ;  $M_c$  – номинальный электромагнитный вращающий момент при синхронной скорости вращения  $\omega_c$ ; в квадратных скобках – электромагнитный момент  $M_{эл}$ .

Очевидно, электромагнитный момент машины  $M_{эл}$  в форме (2.47) отражает действующие на вал генератора вращающие моменты, обусловленные взаимодействием всех контуров обмоток с током. Подчеркнем, что вращающие моменты генератора уравновешиваются моментом инерции вращающихся частей агрегата и вращающим моментом энергетического двигателя; каких-либо других моментов нет. Поэтому, если найти из выражения (2.47) вращающие моменты генератора в функции обобщенных координат, то тем самым будет определено выражение кинетического потенциала и обобщенных сил (моментов) в уравнении движения Лагранжа для электромагнитной части синхронного агрегата.

Электродинамические силы взаимодействия контуров с токами зависят, как видно из (2.47), от мгновенных значений переменных и не зависят от скорости их изменения. Поэтому искомые силы взаимодействия могут быть определены на основе уравнений (2.34) для установившегося режима, в котором производные переменные равны нулю.

При постоянной величине скольжения общее решение дифференциальных уравнений Парка–Горева будет описывать переходный затухающий процесс с установившейся частью в виде постоянных и периодических функций, так как возмущающие систему функции в правой части уравнений содержат периодические и постоянный члены. Поэтому каждая из переменных величин системы уравнений в установившемся режиме будет представлена в форме

$$u = u_0 + u_1 \cos \theta + u_2 \sin \theta. \quad (2.49)$$

Если соответствующие выражения переменных подставить в уравнения (2.34), то сумма постоянных членов каждого уравнения и сумма коэффициентов при периодических функциях будут в отдельности равны нулю (для любого значения аргумента). В результате этой операции получаются системы уравнений, из которых находятся  $u_0, u_1, u_2$ . Так, например, для постоянных членов система уравнений будет иметь вид

$$\left. \begin{aligned} \rho_d u_{d0} + (1+s) u_{q0} + (1+s) u_{rq0} &= 0; \\ -(1+s) u_{d0} + \rho_q u_{q0} - (1+s) e_{q0} - (1+s) u_{rd0} &= 0; \\ \rho_r e_{q0} &= \rho_r u_B; \\ \rho_{rd} u_{rd0} &= 0; \\ \rho_{rq} u_{rq0} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Отсюда следует, что  $u_{rd0} = 0$ ,  $u_{rq0} = 0$ ,  $e_{q0} = u_B$  и количество уравнений уменьшается до двух, описывающих режим машины без демпферных обмоток (см. [10])

$$\left. \begin{aligned} \rho_d u_{d0} + (1+s) u_{q0} &= 0; \\ -(1+s) u_{d0} + \rho_q u_{q0} - (1+s) u_B &= 0; \end{aligned} \right\}$$

Из этой системы находим

$$u_{d0} = \frac{-(1+s)^2 u_B}{(1+s)^2 + \rho_d \rho_q}, \quad u_{q0} = \frac{(1+s) \rho_d u_B}{(1+s)^2 + \rho_d \rho_q}. \quad (2.50)$$

Подобным способом определяются коэффициенты при периодических функциях. Однако, следуя А.А. Гореву, целесообразно воспользоваться приемом представления периодической части переменных в виде вещественных частей комплексных, а именно: периодические слагаемые (2.49) можно представить в виде комплексных чисел

$$u_1 e^{j\theta} = u_1 \cos \theta + j u_1 \sin \theta, \quad u_2 e^{j\theta} = u_2 \cos \theta + j u_2 \sin \theta$$

или

$$j u_2 e^{j\theta} = j u_2 \cos \theta - u_2 \sin \theta,$$

и тогда

$$u_1 \cos \theta + u_2 \sin \theta = \operatorname{Re} u_1 e^{j\theta} - \operatorname{Re} j u_2 e^{j\theta} = \operatorname{Re} (u_1 - j u_2) e^{j\theta}.$$

Например, для переменной  $u_d$  имеем

$$u_{d1} \cos \theta + u_{d2} \sin \theta = \operatorname{Re} S_d e^{j\theta}, \quad \text{где } S_d = u_{d1} - j u_{d2};$$

для переменной  $u_q$

$$u_{q1} \cos \theta + u_{q2} \sin \theta = \operatorname{Re} S_q e^{j\theta}, \quad \text{где } S_q = u_{q1} - j u_{q2},$$

и т. д.

Возмущающие функции можно представить в виде

$$u_c \sin \theta = -u_c \operatorname{Re} j e^{j\theta}, \quad u_c \cos \theta = u_c \operatorname{Re} e^{j\theta}.$$

Подставляя эти комплексы всех переменных в систему (2.34) и выполняя дифференцирование, можно получить

$$\left. \begin{aligned} (\rho_d + js)S_d + (1+s)S_q + jsR + jsD_d + (1+s)D_q &= -jU_c; \\ -(1+s)S_d + (\rho_q + js)S_q - (1+s)R - (1+s)D_d + jsD_q &= -U_c; \\ j\mu_d s S_d + (\rho_r + js)R + jg_1 s D_d &= 0; \\ j\mu'_d s S_d + jg_2 s R + (\rho_{rd} + js)D_d &= 0; \\ j\mu_q s S_q + (\rho_{rq} + js)D_q &= 0. \end{aligned} \right\} (2.51)$$

Здесь обозначено

$$\left. \begin{aligned} S_d &= u_{d1} - ju_{d2}, \quad S_q = u_{q1} - ju_{q2}, \quad R = e_{q1} - je_{q2}, \\ D_d &= u_{rd1} - ju_{rd2}, \quad D_q = u_{rq1} - ju_{rq2}. \end{aligned} \right\} (2.52)$$

Преобразование первых двух уравнений (2.51) позволяет получить более простую систему

$$\left. \begin{aligned} k_1 S_d - k_2 S_q + R + D_d + jD_q &= 2u_c; \\ k_3 S_d - k_4 S_q + mR + mD_d - jmD_q &= 0; \\ m_1 S_d + m_2 R + m_3 D_d &= 0; \\ m_4 S_d + m_5 R + m_6 D_d &= 0; \\ m_7 S_q + m_8 D_q &= 0, \end{aligned} \right\} (2.53)$$

где  $k_1 = 1 + j\rho_d$ ;  $k_2 = \rho_q - j$ ;  $k_3 = m - j\rho_d$ ;  $k_4 = \rho_q + jm$ ;  $m = -(1 + 2s)$ ;  
 $m_1 = j\mu_d s$ ;  $m_2 = \rho_r + js$ ;  $m_3 = jg_1 s$ ;  $m_4 = j\mu'_d s$ ;  $m_5 = jg_2 s$ ;  
 $m_6 = \rho_{rd} + js$ ;  $m_7 = j\mu_q s$ ;  $m_8 = \rho_{rq} + js$ .

Эта линейная неоднородная система уравнений решается относительно каждой переменной так

$$S_d = \frac{\Delta[S_d]}{\Delta_c}, \quad S_q = \frac{\Delta[S_q]}{\Delta_c}, \dots, \quad (2.54)$$

где  $\Delta_c$  – определитель системы, а  $\Delta[S_d]$ ,  $\Delta[S_q]$ , ... – определители, получаемые заменой столбца, составленного из коэффициентов при искомой переменной, столбцом свободных членов, т. е.

$$\Delta_c = \begin{vmatrix} k_1 & -k_2 & 1 & 1 & j \\ k_3 & -k_4 & m & m & -jm \\ m_1 & 0 & m_2 & m_3 & 0 \\ m_4 & 0 & m_5 & m_6 & 0 \\ 0 & m_7 & 0 & 0 & m_8 \end{vmatrix}$$

и, например,

$$\Delta[S_d] = \begin{vmatrix} 2U_c & -k_2 & 1 & 1 & j \\ 0 & -k_4 & m & m & -jm \\ 0 & 0 & m_2 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & m_5 & m_6 & 0 \\ 0 & m_7 & 0 & 0 & m_8 \end{vmatrix}.$$

Раскрывая определители и вычисляя величины (2.54), можно в соответствии с принятыми равенствами (2.52) найти значения вещественной и мнимой частей искомых переменных, а тогда сами переменные будут равны

$$\left. \begin{aligned} u_d &= u_{d0} + u_{d1} \cos \theta + u_{d2} \sin \theta; \\ u_q &= u_{q0} + u_{q1} \cos \theta + u_{q2} \sin \theta; \\ e_q &= e_{q0} + e_{q1} \cos \theta + e_{q2} \sin \theta; \\ u_{rd} &= 0 + u_{rd1} \cos \theta + u_{rd2} \sin \theta; \\ u_{rq} &= 0 + u_{rq1} \cos \theta + u_{rq2} \sin \theta, \end{aligned} \right\} \quad (2.55)$$

где значения  $u_{d0}$ ,  $u_{q0}$  определены формулами (2.50), а значения  $u_{d1}$ ,  $u_{d2}$ ,  $u_{q1}$  и так далее при пренебрежении активными сопротивлениями обмоток статора выражаются через известные параметры машины с помощью формул

$$\left. \begin{aligned} u_{d1} &= \frac{a_d A + b_d B s}{A^2 + B^2}, \quad u_{d2} = \frac{a_d B - b_d A s}{A^2 + B^2}, \quad u_{q1} = \frac{a_q s}{D}, \\ u_{q2} &= \frac{b_q}{D}, \quad e_{q1} = \frac{c_r A s^2 - d_r B s}{A^2 + B^2}, \quad e_{q2} = \frac{c_r B s^2 + d_r A s}{A^2 + B^2}, \\ u_{rd1} &= \frac{e_{rd} A s^2 - f_{rd} B s}{A^2 + B^2}, \quad u_{rd2} = \frac{e_{rd} B s^2 + f_{rd} A s}{A^2 + B^2}, \\ u_{rq1} &= -\frac{e_{rq} s}{D}, \quad u_{rq2} = -\frac{f_{rq} s^2}{D}. \end{aligned} \right\} \quad (2.56)$$

Здесь обозначено

$$\begin{aligned} A &= \rho_r \rho_{rd} - \Delta_d s^2, \quad B = \Delta_r s, \quad D = \sigma_q^2 s^2 + \rho_{rq}^2, \\ \Delta_d &= 1 - \mu_d - \mu'_d - \mu_a + g_1 \mu'_d + g_2 \mu_d, \quad \Delta_r = \sigma'_d \rho_r + \sigma_d \rho_{rd}, \\ a_d &= \rho_r \rho_{rd} - \sigma_a s^2, \quad b_d = \rho_r + \rho_{rd}, \\ a_q &= \mu_q \rho_{rq}, \quad b_q = \sigma_q s^2 + \rho_{rq}^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c_r &= \mu_d - g_1 \mu'_d, & d_r &= \mu_d \rho_{rd}, \\e_{rd} &= \mu'_d - g_r \mu_d, & f_{rd} &= \mu'_d \rho_r, \\e_{rq} &= \mu_q \rho_{rq}, & f_{rq} &= \mu_q \sigma_q.\end{aligned}$$

Интересно сопоставить полученные значения с результатом А.А. Горева. Для машин без демпферной обмотки следует принять  $u_{rd} = u_{rq} = 0$ , разделить равенства (2.56) на декременты  $\rho_{rd}$ ,  $\rho_{rq}$ , положить  $\rho_{rd} = \infty$ ,  $\rho_{rq} = \infty$  (что соответствует разомкнутой демпферной обмотке) и тогда система равенств (2.56) принимает вид

$$\begin{aligned}u_{d1} &= \frac{\rho_r^2 + \sigma_d s^2}{\rho_r^2 + \sigma_d^2 s^2}, & u_{d2} &= \frac{-\mu_d \rho_r s}{\rho_r^2 + \sigma_d^2 s^2}, \\u_{q1} &= 0, & u_{q2} &= 1, & e_{q1} &= 1 - u_{d1}, & e_{q2} &= -u_{d2}, & u_{rd1} &= 0, \\u_{rd2} &= 0, & u_{rq1} &= 0, & u_{rq2} &= 0.\end{aligned}$$

Эти коэффициенты совпадают с коэффициентами А.А. Горева, определявшего в [10, с. 154] электромагнитные моменты машины без демпферных контуров.

Для синхронной машины с демпферной обмоткой формула электромагнитного момента в функции угла отклонения ротора определяется подстановкой найденных значений переменных в формулу (2.47). Большое число переменных в рассматриваемой системе вызывает громоздкие вычисления и преобразования. Эти операции могут быть значительно упрощены, если учесть, что конечной целью является получение зависимостей обобщенных электродинамических сил от угла поворота ротора машины. Для практического использования в уравнении Лагранжа эти зависимости вычисляются с точностью до величин второго порядка малости.

Действительно, так как обобщенные координаты  $q_k, \dot{q}_k$  являются величинами первого порядка малости, то и дифференциальные уравнения движения составляют с точностью до величин первого порядка малости, однако, учитывая, что при дифференцировании по  $q_k$  и  $\dot{q}_k$  порядок малости понижается на единицу, значение кинетического потенциала вычисляются с точностью до величин второго порядка малости. Следовательно, в процессе преобразования величинами  $s^2 \equiv \dot{\theta}^2$  можно пренебречь, и тогда задача получения конечных результатов упрощается.

После подстановки переменных (2.55) в выражение электромагнитного момента (2.47) получаются следующие зависимости.



Постоянные составляющие переменных величин определяют собой одну из составляющих общего электромагнитного момента генератора

$$M_{\Gamma} = \left( \frac{u_{d0} + e_{q0}}{x_q} - \frac{u_{d0}}{x_d} \right) u_{q0} =$$

$$= \frac{(1+s)\rho_d e_{q0}^2}{[(1+s)^2 + \rho_d \rho_q]^2} \left[ \frac{(1+s)^2}{x_d} + \frac{\rho_d \rho_q}{x_q} \right]. \quad (2.57)$$

При отдельно работающем агрегате это единственный момент генератора, уравновешивающий вращающий момент двигателя, так как остальные моменты при отсутствии внешнего напряжения сети не проявляются. Величина момента  $M_{\Gamma}$  зависит от скорости вращения, а последняя определяется степенью неравномерности характеристики регулятора энергетического двигателя. При астатическом регулировании агрегата с помощью двухимпульсного регулятора, который обеспечивает генератору синхронную скорость вращения, рассматриваемый момент равен

$$M_{\Gamma} = \frac{\rho_d e_{q0}^2}{(1 + \rho_d \rho_q)^2} \left( \frac{1}{x_d} + \frac{\rho_d \rho_q}{x_q} \right). \quad (2.58)$$

После преобразований эту формулу можно представить в виде

$$M_{\Gamma} = \frac{(x_q^2 + r_a^2) r_a}{(x_d x_q + r_a^2)^2} e_{q0}^2, \quad (2.59)$$

где напряжение возбуждения обозначено равным ему в системе относительных единиц стационарным значением синхронной ЭДС. Если считать, что в значения сопротивлений генератора входят сопротивления нагрузки  $r_n$  и  $x_n$ , то после подстановки получаемого из (1.2) выражения

$$e_{q0} = \frac{x_{dH} x_{qH} + r_{aH}^2}{z_H \sqrt{x_{qH}^2 + r_{aH}^2}} U$$

формула момента примет вид

$$M_{\Gamma} = r_{aH} \frac{U^2}{z_H^2} = (r_a + r_n) I^2. \quad (2.60)$$

Следовательно, численное значение рассматриваемого момента определяется энергией, рассеиваемой на активном сопротивлении обмотки статора генератора и во внешнем сопротивлении нагрузки. При коротком замыкании, когда внешняя нагрузка равна нулю, вся энергия генератора превращается в джоулево тепло, выделяемое в обмотках статора.

Заметим, что величина электромеханического момента нагрузки автономно работающего генератора не зависит от параметров демпферной обмотки и поэтому формула (2.57), полученная из общих уравнений синхронной машины, совпадает с формулой, выведенной А.А. Горевым [10] для момента машины без демпферных обмоток, который назван им моментом короткого замыкания. Если сопротивлением статорной обмотки пренебрегают, то величина этого момента становится равной нулю.

Электромагнитный момент машины, включенной на внешнее напряжение сети и имеющей демпферную обмотку, определится при помощи подстановки периодических составляющих переменных (2.55) в формулу (2.47). После преобразований, в процессе которых пренебрегаем обобщенной координатой второго порядка малости, можно увидеть, что если не учитывать активное сопротивление обмотки статора, то электромеханический момент машины состоит из двух составляющих, одна из которых зависит от значения обобщенной координаты, а другая – от производной этой координаты

$$M_{эл} = M_c(\theta) + M_a(\dot{\theta}).$$

Указанные составляющие через параметры машины имеют следующие выражения:

$$M_c = \frac{U_c E_{q0}}{x_d} \sin \theta + \frac{(x_d - x_q) U_c^2}{2x_d x_q} \sin 2\theta; \quad (2.61)$$

$$M_a = \frac{U_c^2}{\omega_c x_d} \left[ \frac{\mu_q x_d}{\rho_{rq} x_q} \cos^2 \theta + \left( \frac{\mu_d}{\rho_r} + \frac{\mu'_d}{\rho_{rd}} \right) \sin^2 \theta \right] \dot{\theta}. \quad (2.62)$$

Сравнение выражения первой составляющей момента с равенством (1.18) свидетельствует о том, что эта составляющая является синхронным моментом явнополюсной машины. При отсутствии внешнего напряжения ( $U_c = 0$ ) данный момент равен нулю, при отсутствии возбуждения ( $E_{q0} = 0$ ) момент отличен от нуля вследствие разных сопротивлений в продольной и поперечной осях машины. У неявнополюсного генератора синхронный момент исчезает при отсутствии как внешнего напряжения, так и возбуждения.

Вторая составляющая электромагнитного момента представляет собой асинхронный момент, ибо при отсутствии скольжения производная обобщенной координаты равна нулю (так как  $\dot{\theta} = \omega_c s$ ) и эта составляющая момента исчезает; равным нулю асинхронный момент становится и при отсутствии внешнего напряжения. Если машина

не имеет демпферной обмотки, численное значение асинхронного момента уменьшается до величины

$$M_a = \frac{\mu_d U_c^2}{\rho_r \omega_c x_d} \sin^2 \theta \dot{\theta},$$

обусловленной наличием продольного контура обмотки возбуждения; при разомкнутой обмотке возбуждения ( $\rho_r = \infty$ ) этот момент исчезает.

Асинхронный момент малой величины при указанных условиях может иметь место за счет взаимодействия токов, наведенных в стальной конструкции вращающегося ротора, с магнитным полем статора. Здесь это явление не рассматривается.

Формулу асинхронного момента машины с демпферными обмотками можно преобразовать к виду

$$M_a = \frac{U_c^2}{2\omega_c x_d} [(r_d + r_q) - (r_d - r_q) \cos 2\theta] \dot{\theta}, \quad (2.63)$$

где  $r_q = \frac{\mu_q x_d}{\rho_{rq} x_q}$ ;  $r_d = \frac{\mu_d}{\rho_r} + \frac{\mu'_d}{\rho_{rd}}$ .

Отсюда видно, что асинхронный момент имеет постоянную составляющую и периодическую, меняющуюся с периодом  $\frac{\pi}{\omega_c s}$ .

Общий электромагнитный момент синхронной машины (2.47) формально будет состоять из трех составляющих: момента потерь (2.59), синхронного (2.61) и асинхронного (2.63) моментов. После подстановки этих составляющих в общее уравнение динамического равновесия машины (2.48) последнее получает такую форму

$$J_c \ddot{\theta} + \frac{(x_q^2 + r_a^2) r_a}{(x_d x_q + r_a^2)} E_{q0}^2 + \frac{U_c E_{q0}}{x_d} \sin \theta + \frac{(x_d - x_q) U_c^2}{2x_d x_q} \sin 2\theta + \frac{U_c^2}{2\omega_c x_d} [(r_d + r_q) - (r_d - r_q) \cos 2\theta] \dot{\theta} = M_{dc}. \quad (2.64)$$

Это уравнение справедливо для случая движения ротора синхронной машины, к статорной обмотке которой приложено напряжение внешнего источника энергии. В установившемся движении  $\theta = \theta_0$ ,  $\dot{\theta} = 0$ ,  $\ddot{\theta} = 0$  и уравнение

$$\frac{(x_q^2 + r_a^2) r_a}{(x_d x_q + r_a^2)^2} E_{q0}^2 + \left[ \frac{U_c E_{q0}}{x_d} \sin \theta_0 + \frac{(x_d - x_q) U_c^2}{2x_d x_q} \sin 2\theta_0 \right] = M_{dc}$$

отражает режим работы машины с синхронной скоростью. Первый член пропорционален потерям в активном сопротивлении статора, а член в квадратных скобках соответствует мощности, отдаваемой в сеть.

Автономная работа машины происходит при отсутствии напряжения внешнего источника энергии. Движение ротора в этом случае описывается уравнением

$$J_c \ddot{\theta} + \frac{(x_{qn}^2 + r_{ан}^2)r_{ан}}{(x_{дн}x_{qn} + r_{ан}^2)^2} E_{q0}^2 = M_{дс}, \quad (2.65)$$

где второй член соответствует моменту сопротивления на валу генератора при наличии нагрузки.

В случае параллельной работы машины с сетью бесконечной мощности или с другими генераторами величиной момента потерь можно пренебречь (при обычных параметрах машины, величина его составляет не более 5 % номинального значения), и уравнение (2.64) примет вид

$$J_c \ddot{\theta} + \frac{U_c E_{q0}}{x_d} \sin \theta + \frac{(x_d - x_q) U_c^2}{2x_d x_q} \sin 2\theta + \frac{U_c^2}{2\omega_c x_d} [(r_d + r_q) - (r_d - r_q) \cos 2\theta] \dot{\theta} = M_{дс}. \quad (2.66)$$

Все приведенные выше уравнения неустановившегося движения ротора машины являются нелинейными дифференциальными уравнениями второго порядка, исследование и решение которых в общем виде без привлечения методов линейной аппроксимации невозможно. Но исследование колебательного движения машины около положения установившегося движения и устойчивости движения в заданном режиме может быть осуществлено при помощи указанных уравнений, если их представить в вариациях [35].

В соответствии с правилами вариационного исчисления последнее уравнение движения запишется так

$$J_c \delta \ddot{\theta} + \frac{U_c}{x_d} \delta (E_{q0} \sin \theta) + \frac{(x_d - x_q) U_c^2}{2x_d x_q} \delta (\sin 2\theta) + \frac{U_c^2}{2\omega_c x_d} [(r_d + r_q) \delta (p\theta) - (r_d - r_q) \delta (\cos 2\theta p\theta)] = \delta M_{дс},$$

а затем, после варьирования

$$J_c \delta \ddot{\theta} + \frac{U_c}{x_d} (\sin \theta_0 \delta E_{q0} + E_{q0} \cos \theta_0 \delta \theta) + \frac{(x_d - x_q) U_c^2}{x_d x_q} \cos 2\theta_0 \delta \theta + \frac{U_c^2}{2\omega_c x_d} [(r_d + r_q) p \delta \theta - (r_d - r_q) (\cos 2\theta_0 p \delta \theta + p \theta_0 \delta \cos 2\theta)] = \delta M_{дс}.$$

Заменяя символ вариации  $\delta$  на символ малого отклонения  $\Delta$  и учитывая, что начальный режим является установившимся, т. е.  $p\theta_0 = 0$ , получаем следующее уравнение движения в вариациях:

$$J_c \Delta \ddot{\theta} + \left[ \frac{U_c E_{q0}}{x_d} \cos \theta_0 + \frac{(x_d - x_q) U_c^2}{x_d x_q} \cos 2\theta_0 \right] \Delta \theta + \\ + \frac{U_c^2}{2\omega_c x_d} \left[ (r_d + r_q) - (r_d - r_q) \cos 2\theta_0 \right] \Delta \dot{\theta} = \Delta M_{дс} - \frac{U_c}{x_d} \sin \theta_0 \Delta E_q. \quad (2.67)$$

Вращающий момент сопротивления на валу машины, пропорциональный отклонению ЭДС  $\Delta E_q$ , характеризует в уравнении вариаций изменение величины нагрузки вследствие изменения крутизны угловой характеристики машины под влиянием регулируемого возбуждения. Если не предполагается регулирование возбуждения машины, то  $\Delta E_q = 0$ , и в уравнении (2.67) соответствующая составляющая электромеханического момента исчезает.

Синхронная машина, включенная на энергосистему, при внезапном изменении режима и при устойчивости движения совершает колебательные движения около нового устанавливающегося положения. Во вращающейся с синхронной скоростью системе координат машину можно представить в виде динамической системы, обладающей инерционными, упругими связями и свойствами рассеивать энергию.

Опираясь на такое представление, можно найти аналогию между структурой общего уравнения движения Лагранжа (2.18) и полученным уравнением движения синхронной машины (2.67) в вариациях [41]. Так, можно записать выражения для кинетической энергии, потенциальной энергии, диссипативной функции и обобщенных сил

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{\theta}} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = J_c \Delta \ddot{\theta}; \\ - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= - \frac{\partial (T - V)}{\partial \theta} = \frac{\partial V}{\partial \theta} = \\ &= \left[ \frac{U_c E_{q0}}{x_d} \cos \theta_0 + \frac{(x_d - x_q) U_c^2}{x_d x_q} \cos 2\theta_0 \right] \Delta \theta; \\ \frac{\partial F}{\partial \dot{\theta}} &= \frac{U_c^2}{2\omega_c x_d} \left[ (r_d + r_q) - (r_d - r_q) \cos 2\theta_0 \right] \Delta \dot{\theta}; \\ \Lambda &= \Delta M_{дс} - \frac{U_c}{x_d} \sin \theta_0 \Delta E_q. \end{aligned} \right\} \quad (2.68)$$

По аналогии с уравнениями аналитической динамики в эти равенства можно ввести: коэффициент жесткости, называемый здесь коэффициентом синхронной жесткости или просто синхронной жесткостью,

$$C = \frac{U_c E_{q0}}{x_d} \cos \theta_0 + \frac{(x_d - x_q) U_c^2}{x_d x_q} \cos 2\theta_0, \quad (2.69)$$

коэффициент рассеяния, называемый здесь демпферным коэффициентом,

$$D = \frac{U_c^2}{2\omega_c x_d} [(r_d + r_q) - (r_d - r_q) \cos 2\theta_0] \quad (2.70)$$

и дополнительно ввести коэффициент влияния возбуждения

$$C_B = \frac{U_c}{x_d} \sin \theta_0. \quad (2.71)$$

Следовательно, кинетическая энергия, потенциальная энергия и диссипативная функция для синхронной машины в рассматриваемых условиях будут соответственно равны

$$T = \frac{1}{2} J_c \Delta \dot{\theta}^2, \quad V = \frac{1}{2} C \Delta \theta^2, \quad F = \frac{1}{2} D \Delta \dot{\theta}^2. \quad (2.72)$$

В принятых условных обозначениях уравнение движения синхронной машины в вариациях (2.67) примет вид уравнения движения Лагранжа

$$J_c \Delta \ddot{\theta} + C \Delta \theta + D \Delta \dot{\theta} = \Delta M_{dc} - \Delta M_\Gamma, \quad (2.73)$$

где  $\Delta M_\Gamma = C_B \Delta E_q$  – момент сопротивления на валу генератора, обусловленный изменением его возбуждения.

Момент инерции  $J_c$  вычисляется для всего агрегата в целом с учетом вращающихся вместе с валом частей генератора и двигателя.

Синхронная жесткость  $C$ , как видно из формулы (2.69), представляет собой величину «синхронизирующей мощности», вычисленную для координаты  $\theta_0$  по угловой характеристике машины (рис. 2.2, а)

$$C = \operatorname{tg} \alpha = \left( \frac{\partial P}{\partial \theta} \right)_0. \quad (2.74)$$

Демпферный коэффициент  $D_c$ , определяемый выражением (2.70), представляет собой тангенс угла наклона касательной к характеристике демпферного момента машины (рис. 2.2, б)

$$D = \operatorname{tg} \beta = \left( \frac{\partial M_a}{\partial \theta} \right)_0. \quad (2.75)$$

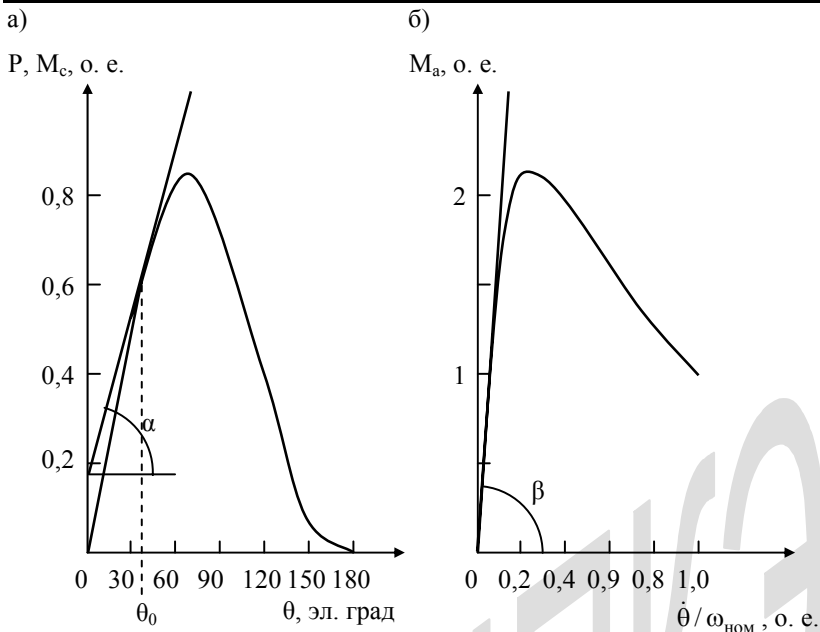


Рис. 2.2. Графики вращающих моментов синхронного генератора:  
а – характеристика синхронного момента (угловая характеристика при  $E_q = 1$ );  
б – характеристика асинхронного момента

Электромашиностроительные заводы рассчитывают характеристику демпферного момента генератора в зависимости от скольжения, которая может быть использована для вычисления демпферного коэффициента. Для режима машины с постоянным скольжением демпферный коэффициент остается неизменным. При этом среднее значение демпферного момента за период скольжения определяется постоянной составляющей выражения (2.70), ибо среднее значение второй, периодической составляющей в этом выражении (меняющейся с периодом  $\frac{\pi}{\omega_c s}$ ) за один оборот ротора равно нулю. Величина демпферного коэффициента у машины, ротор которой движется около положения установившегося равновесия, должна определяться непосредственно по графику демпферного момента для нулевого значения скорости изменения угла вылета ротора.

Уравнение движения (2.73) позволяет иллюстрировать режим синхронного генераторного агрегата в виде механической конструкции, показанной на рис. 2.3. Маховик с моментом инерции  $J_c$  представляет собой вращающиеся массы синхронного агрегата, демпферный эффект показан элементом трения  $D$ ; синхронная жесткость  $C$  являет собой синхронную связь агрегата с энергосистемой ( $J_3 = \infty$ ) по линии электропередачи; к валу маховика приложены вращающий момент со стороны энергетического двигателя ( $\Delta M_{dc}$ ) и момент сопротивления со стороны генератора ( $\Delta M_{gc}$ ); колебания маховика представлены углом  $\Delta\theta$ .

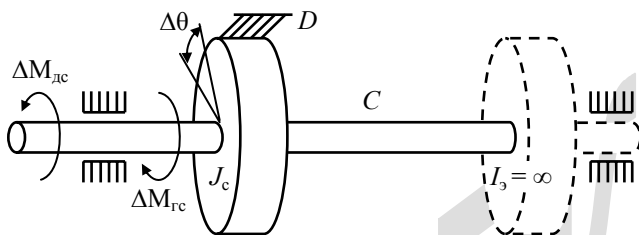


Рис. 2.3. Механический аналог синхронного агрегата, включенного на шины энергосистемы

При колебаниях ротора около его положения в установившемся режиме величина электромагнитного момента изменяется в зависимости от частоты и амплитуды колебаний. Анализ больших качаний (свыше 30 эл. град.) и динамической устойчивости синхронной машины в этих условиях при помощи эллиптических функций Якоби и Вейерштрасса приведен в работе Е.Я. Казовского [16]. Этот метод в случае представления электромагнитного момента машины в виде двух составляющих не может быть использован, так как следует определить влияние частоты отдельно на величину каждой составляющей момента. При малых колебаниях ротора основное влияние на величину электромагнитного момента машины оказывает частота колебаний, и поэтому для отыскания искомых зависимостей можно воспользоваться методом Б. Адкинса [14].

Если считать, что ротор испытывает синусоидальные колебания с частотой  $\frac{\omega_k}{2\pi}$ , то при указанном движении ротора изменение синхронной жесткости машины и демпферного коэффициента в общем виде может быть наиболее просто установлено при помощи операторных уравнений Адкинса для синхронной машины



$$\left. \begin{aligned} p\Psi_d + \omega\Psi_q + r_d i_d &= U \sin \theta; \\ -p\Psi_d + \omega\Psi_q + r_d i_q &= U \cos \theta; \\ \frac{x_d(p)}{\omega} i_d + \frac{G(p)}{\omega} U_B &= \Psi_d; \\ \frac{x_q(p)}{\omega} i_q &= \Psi_q; \\ (\Psi_d i_q - \Psi_q i_d) \omega &= M_{эл}, \end{aligned} \right\} \quad (2.76)$$

где операторные сопротивления означают

$$x_d(p) = \frac{(1+T'_d p)(1+T''_d p)}{(1+T'_{d0} p)(1+T''_{d0} p)} x_d; \quad x_q(p) = \frac{1+T''_q p}{1+T''_{q0} p} x_q;$$

$$G(p) = \frac{1+T_{rd} p}{(1+T'_{d0} p)(1+T''_{d0} p)} \frac{x_{md}}{r_B}; \quad \omega = \omega_c - p\theta.$$

Входящие в эти формулы постоянные времени приведены в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Постоянные времени	Обозначение постоянных времени	
	по продольной оси	по поперечной оси
Переходная ненагруженной машины	$T'_{d0}$	—
Переходная при коротком замыкании	$T'_d = \frac{x'_d}{x_d} T'_{d0}$	—
Сверхпереходная ненагруженной машины	$T''_{d0}$	$T''_{q0}$
Сверхпереходная при коротком замыкании	$T''_d = \frac{x''_d}{x_d} \frac{T'_{d0} T''_{d0}}{T'_d}$	$T''_q = \frac{x''_q}{x_q} T''_{q0}$
Демпферной обмотки, обусловленная индуктивностью рассеяния	$T_{rd} = \frac{x_{rd}}{\omega r_{rd}}$	—

Пренебрегая активным сопротивлением обмотки статора машины и считая возбуждение постоянным, можно получить из системы уравнений (2.76) выражения для синхронной жесткости  $C$  и демпферного коэффициента  $D$  в зависимости от частоты колебаний  $\omega_k$ .

Варьируя указанную систему уравнений с учетом того, что

$$\left. \begin{aligned} \delta\omega &= \delta(\omega_c - p\theta) = -p\delta\theta; \\ \delta x_d(p) &= 0, \quad \delta x_q(p) = 0 \end{aligned} \right\}$$

и заменяя знак вариации  $\delta$  на знак малого отклонения  $\Delta$ , имеем

$$\left. \begin{aligned} p\Delta\psi_d + \omega_0\Delta\psi_q - \psi_{q0}p\Delta\theta &= U \cos\theta_0\Delta\theta; \\ -\omega_0\Delta\psi_d + \psi_{d0}p\Delta\theta + p\Delta\psi_q &= -U \sin\theta_0\Delta\theta; \\ x_d(p)_0\Delta i_d + G(p)_0\Delta U_B &= \omega_0\Delta\psi_d - \psi_{d0}p\Delta\theta; \\ x_q(p)_0\Delta i_q &= \omega_0\Delta\psi_q - \psi_{q0}p\Delta\theta; \\ -(\psi_{d0}i_{q0} - \psi_{q0}i_{d0})p\Delta\theta + \\ + (\psi_{d0}\Delta i_q + i_{q0}\Delta\psi_d - \psi_{q0}\Delta i_d - i_{d0}\Delta\psi_q)\omega_0 &= \Delta M_{эл}. \end{aligned} \right\} (2.77)$$

Подставляя в первое уравнение этой системы четвертое, а во второе – третье получим следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} p\Delta\psi_d + x_q(p)_0\Delta i_q &= U \cos\theta_0\Delta\theta; \\ p\Delta\psi_q - x_d(p)_0\Delta i_d - G(p)_0\Delta U_B &= -U \sin\theta_0\Delta\theta. \end{aligned} \right\} (2.78)$$

Из этих выражений определяются отклонения составляющих тока статора

$$\left. \begin{aligned} \Delta i_q &= \frac{U \cos\theta_0\Delta\theta - p\Delta\psi_d}{x_q(p)_0}; \\ \Delta i_d &= \frac{U \sin\theta_0\Delta\theta + p\Delta\psi_q - G(p)_0\Delta U_B}{x_d(p)_0}. \end{aligned} \right\} (2.79)$$

Далее величины установившегося режима определяются из (2.76) для значения  $p = 0$

$$\left. \begin{aligned} \omega_0\psi_{q0} &= U \sin\theta_0; \\ -\omega_0\psi_{d0} &= U \cos\theta_0; \\ x_d i_{d0} + U_{B0} &= \omega_0\psi_{d0}; \\ x_q i_{q0} &= \omega_0\psi_{q0}. \end{aligned} \right\} (2.80)$$

Если из этой системы уравнений найти значения  $\psi_{d0}$ ,  $\psi_{q0}$ ,  $i_{d0}$ ,  $i_{q0}$  и подставить их в первое слагаемое для  $\Delta M_{эл}$  системы (2.77), то получим формулу

$$(\psi_{d0}i_{q0} - \psi_{q0}i_{d0})p\Delta\theta = \frac{P_0}{\omega_0}p\Delta\theta,$$

$$\text{где } P_0 = \frac{UE_{q0}}{x_d} \sin \theta_0 + \frac{(x_d - x_q)U^2}{2x_d x_q} \sin 2\theta_0.$$

Выражения второго слагаемого для  $\Delta M_{\text{эл}}$  находятся следующим образом: первые два уравнения системы (2.77) представляются в виде комплексных чисел (с заменой оператора  $p$  на  $j\omega_k$ ) с подстановкой значений установившегося режима  $\psi_{q0}, \psi_{d0}$  из (2.80), а именно:

$$\left. \begin{aligned} j\omega_k \Delta \psi_d + \omega_0 \Delta \psi_q &= \frac{U}{\omega_0} \Delta \theta (j\omega_k \sin \theta_0 + \omega_0 \cos \theta_0); \\ j\omega_k \Delta \psi_q - \omega_0 \Delta \psi_d &= \frac{U}{\omega_0} \Delta \theta (j\omega_k \cos \theta_0 - \omega_0 \sin \theta_0). \end{aligned} \right\}$$

Из этих равенств комплексных чисел можно составить равенства вещественных и мнимых величин

$$\left. \begin{aligned} \Delta \psi_d &= \frac{U}{\omega_0} \sin \theta_0 \Delta \theta; & U \cos \theta_0 \Delta \theta &= \omega_0 \Delta \psi_q; \\ \Delta \psi_q &= \frac{U}{\omega_0} \cos \theta_0 \Delta \theta; & U \sin \theta_0 \Delta \theta &= \omega_0 \Delta \psi_d. \end{aligned} \right\} \quad (2.81)$$

Подставляя эти величины в выражения для отклонений токов (2.79), имеем

$$\left. \begin{aligned} \Delta i_q &= U \frac{\rho_{kq} e^{-j\varphi_{kq}}}{x_q(j\omega_k)} \Delta \theta; \\ \Delta i_d &= U \frac{\rho_{kd} e^{-j\varphi_{kd}}}{x_d(j\omega_k)} \Delta \theta - \frac{G(j\omega_k)}{x_d(j\omega_k)} \Delta U_B, \end{aligned} \right\} \quad (2.82)$$

где

$$\begin{aligned} \rho_{kq} &= \sqrt{\cos^2 \theta_0 + \left(\frac{\omega_k}{\omega_0}\right)^2 \sin^2 \theta_0}; & \varphi_{kq} &= \arctg \frac{\omega_k \sin \theta_0}{\omega_0 \cos \theta_0}; \\ \rho_{kd} &= \sqrt{\sin^2 \theta_0 + \left(\frac{\omega_k}{\omega_0}\right)^2 \cos^2 \theta_0}; & \varphi_{kd} &= \arctg \frac{\omega_k \cos \theta_0}{\omega_0 \sin \theta_0}. \end{aligned}$$

При обычном соотношении круговых частот  $\omega_0 \gg \omega_k$  можно принять  $\rho_{kq} = \cos \theta_0$ ,  $\rho_{kd} = \sin \theta_0$ ,  $\varphi_{kq} = 0$ ,  $\varphi_{kd} = 0$ .

Тогда выражения (2.82) для отклонения токов упрощаются

$$\left. \begin{aligned} \Delta i_q &= U \frac{\cos \theta}{x_q(j\omega_k)} \Delta \theta; \\ \Delta i_d &= U \frac{\sin \theta}{x_d(j\omega_k)} \Delta \theta - \frac{G(j\omega_k)}{x_d(j\omega_k)} \Delta U_B. \end{aligned} \right\} \quad (2.83)$$

Наконец, подставляя эти зависимости и величины  $i_{q0}, i_{d0}, \Psi_{q0}, \Psi_{d0}$  из (2.80) во второе слагаемое для  $\Delta M_{\text{эл}}$  системы (2.77) и, полагая возбуждение постоянным ( $\Delta U_B = 0$ ), получим уравнение для электромагнитного момента  $\frac{\Delta M_{\text{эл}}}{\Delta \theta} = C_\omega + j\omega D_\omega$ , в котором выражения для искомым значений синхронной жесткости и демпферного коэффициента в функции частоты колебаний имеют вид

$$C_\omega = \frac{UE_{q0}}{x_d} \cos \theta_0 - U^2 \left[ \left( \frac{\cos^2 \theta_0}{x_d} + \frac{\sin^2 \theta_0}{x_q} \right) - \left( \frac{\cos^2 \theta_0 \cos \varphi_q}{x_q v_q} + \frac{\sin^2 \theta_0 \cos \varphi_d}{x_d v_d} \right) \right]; \quad (2.84)$$

$$D_\omega = U^2 \left( \frac{\cos^2 \theta_0 \sin \varphi_q}{x_q v_q} + \frac{\sin^2 \theta_0 \sin \varphi_d}{x_d v_d} \right). \quad (2.85)$$

Здесь величины  $v_d, v_q, \varphi_d, \varphi_q$  зависят от частоты колебаний ротора  $\omega_k$

$$\left. \begin{aligned} v_d &= \sqrt{\frac{(1 + \omega_k^2 T_d'^2)(1 + \omega_k^2 T_d''^2)}{(1 + \omega_k^2 T_{d0}'^2)(1 + \omega_k^2 T_{d0}''^2)}}; & v_q &= \sqrt{\frac{1 + \omega_k^2 T_q''^2}{1 + \omega_k^2 T_{q0}''^2}}; \\ \varphi_d &= \arctg \omega_k T_d' + \arctg \omega_k T_d'' - (\arctg \omega_k T_{d0}' + \arctg \omega_k T_{d0}''); & \\ \varphi_q &= \arctg \omega_k T_q'' - \arctg \omega_k T_{q0}'' \end{aligned} \right\} \quad (2.86)$$

Графики, иллюстрирующие изменение синхронной жесткости и демпферного коэффициента в зависимости от частоты колебаний, построены на рис. 2.4 по формулам (2.84) и (2.85) для конкретной машины мощностью 150 кВт при 750 об/мин.

При отсутствии колебаний, когда  $\omega_k = 0$  и коэффициенты будут  $v_d = 1, v_q = 1, \varphi_d = 0, \varphi_q = 0$ , величина синхронной жесткости равна  $C = \frac{U_c E_{q0}}{x_d} \cos \theta + \frac{x_d - x_q}{x_d x_q} U_c^2 \cos 2\theta_0 = 1,9$ , а демпферный коэффициент  $D = 0$  – т. е. значение при синхронном режиме генератора. Для номи-

нального режима этого генератора угол  $\theta_0 = 30^\circ$  и, следовательно,  

$$C = \frac{M_c}{\theta_0} = \frac{1}{0,52} = 1,92 \text{ эл. рад}^{-1}$$
, что совпадает с величиной  $C$  на рис. 2.4 для  $\omega_k = 0$ .

Таким образом, при установившихся колебаниях ротора синхронной машины около положения равновесия ее синхронная жесткость и демпферный коэффициент в уравнении движения Лагранжа изменяются в зависимости от частоты колебаний. При известной частоте колебаний они могут быть определены с помощью выведенных формул, а при известной частоте периодических возмущающих сил – путем последовательных приближений.

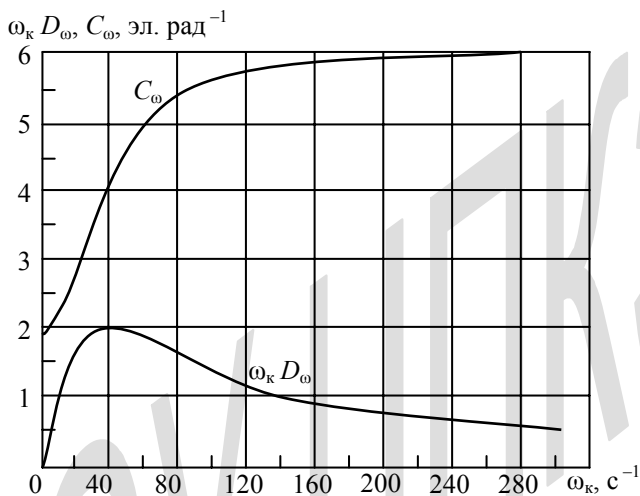


Рис. 2.4. Влияние изменения частоты установившихся колебаний ротора на синхронную жесткость и демпферный коэффициент синхронного генератора

Для машин без демпферной обмотки упрощенные формулы, не учитывающие влияние частоты колебаний, обеспечивают недостаточную точность расчета при малой частоте колебаний, так как демпфирующее действие обмотки возбуждения невелико. Однако, если имеет место значительный демпферный эффект, обусловленный демпферной обмоткой или вихревыми токами в массивных стальных частях ротора, или колебания происходят при достаточно высокой частоте, то эти формулы приводят к большой погрешности.

Уравнение Лагранжа для синхронной машины (2.73) справедливо в случае включения последней на шины энергосистемы, напряжение которой практически сохраняется неизменным. В автономных электроустановках, как известно, напряжение не является постоянным. Поэтому

в упомянутом уравнении, строго говоря, напряжение будет такой величиной, которая зависит от возбуждения не только данного генератора, но и генераторов, включенных вместе с ним на параллельную работу. Зависимость напряжения от ЭДС, например,  $k$ -го генератора будет определяться формулой (1.2). После подстановки этой зависимости в уравнение движения синхронной машины (2.67) и соответствующего варьирования можно получить уравнение движения Лагранжа в вариациях с учетом взаимного влияния возбуждения генераторов.

Однако, как показывает опыт многочисленных экспериментальных исследований параллельной работы синхронных машин с автоматическим регулированием напряжения, в автономных электростанциях изменение напряжения при всех зарегистрированных размахах колебаний роторов машины не превосходит 2 %. Это объясняется тем, что при колебаниях роторов системы автоматического регулирования обеспечивают требуемое регулирование напряжения, а результирующие магнитные потоки в машинах сохраняются неизменными. Поэтому с целью получения простых зависимостей при исследовании параллельной работы генераторов с автоматическим регулированием, можно считать напряжение на шинах электростанции постоянным. Тогда уравнение движения Лагранжа отдельной машины (2.73) может быть распространено и на другие, параллельно включенные с нею машины.

Колебательное движение роторов двух параллельно включенных машин около положения установившегося равновесия, или, иначе, относительно вектора, вращающегося с синхронной скоростью, может иметь амплитуду различной величины, но отклонения роторов должны быть в противофазе. В противном случае синхронное вращение машин будет нарушено, и их скорость вращения будет либо увеличиваться, либо уменьшаться.

Следовательно, потенциальная энергия двух параллельно включенных машин, обладающих синхронными жесткостями  $C_1$  и  $C_2$ , при отклонении координаты  $\theta$  соответственно на величины  $\Delta\theta_1$  и  $\Delta\theta_2$  определяется суммой

$$V = \frac{1}{2}(C_1\Delta\theta_1^2 + C_2\Delta\theta_2^2).$$

Если обозначить эквивалентную синхронную жесткость между машинами через  $C_{12}$ , то учитывая противоположные знаки приращений, получим равенство

$$C_{12}(\Delta\theta_1 + \Delta\theta_2)^2 = C_1\Delta\theta_1^2 + C_2\Delta\theta_2^2.$$

Отсюда

$$C_{12} = \frac{C_1\Delta\theta_1^2 + C_2\Delta\theta_2^2}{(\Delta\theta_1 + \Delta\theta_2)^2}$$

и так как по условиям колебаний

$$C_1\Delta\theta_1 = C_2\Delta\theta_2,$$

то эквивалентная жесткость между двумя параллельно включенными машинами определится формулой

$$C_{12} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}. \quad (2.87)$$

Интересные результаты дает простой анализ этого равенства: если одна из синхронных жесткостей равна нулю, эквивалентная жесткость также равна нулю, т. е. при исчезновении синхронной связи у одного из генераторов общая связь – синхронизм – нарушается; при увеличении одной из синхронных жесткостей до бесконечности эквивалентная жесткость становится равной синхронной жесткости одной машины; наконец, если обе синхронные жесткости равны между собой, что соответствует случаю параллельной работы однотипных генераторов с равномерным распределением нагрузки, эквивалентная жесткость между ними уменьшается в два раза.

При колебаниях роторов параллельно включенных машин относительное перемещение роторов будет равно алгебраической сумме скоростей приращений углов. Например, для двух машин в момент расхождения роторов сила сопротивления движению первой машины будет равна  $D_1(\Delta\dot{\theta}_1 + \Delta\dot{\theta}_2)$ , а второй –  $[-D_2(\Delta\dot{\theta}_1 + \Delta\dot{\theta}_2)]$ , при встречном движении роторов сила сопротивления движению первой машины равна  $D_1(\Delta\dot{\theta}_1 - \Delta\dot{\theta}_2)$ , а второй –  $[-D_2(\Delta\dot{\theta}_1 - \Delta\dot{\theta}_2)]$ .

Таким образом, колебательные движения, например, двух синхронных агрегатов, включенных на параллельную работу, могут быть описаны следующей системой уравнений:

$$\left. \begin{aligned} J_1\Delta\ddot{\theta}_1 + C_{12}(\Delta\theta_1 - \Delta\theta_2) + D_1(\Delta\dot{\theta}_1 - \Delta\dot{\theta}_2) &= \Delta M_{д1} - \Delta M_{г1}; \\ J_2\Delta\ddot{\theta}_1 - C_{12}(\Delta\theta_1 - \Delta\theta_2) - D_2(\Delta\dot{\theta}_1 - \Delta\dot{\theta}_2) &= \Delta M_{д2} - \Delta M_{г2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.88)$$

В итоге полученный результат можно распространить на группу  $m$  синхронных машин, включенных на параллельную работу. В соответствии с формулами аналитической динамики (2.6), (2.11), (2.17) для всей группы  $m$  агрегатов, структурные схемы которых удовлетворяют принятым здесь условиям, могут быть определены выражения кинетической и потенциальной энергий, а также диссипативной функции в зависимости от обобщенной координаты – угла вылета роторов [41]

$$T = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j J_{ij} \dot{\theta}_i \dot{\theta}_j = \frac{1}{2} (J_1 \Delta \dot{\theta}_1^2 + J_2 \Delta \dot{\theta}_2^2 + \dots + J_m \Delta \dot{\theta}_m^2); \quad (2.89)$$

$$V = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j C_{ij} \theta_i \theta_j = \frac{1}{2} [C_{12} (\Delta \theta_2 - \Delta \theta_1)^2 + \dots + C_{1m} (\Delta \theta_m - \Delta \theta_1)^2 + \dots + C_{23} (\Delta \theta_3 - \Delta \theta_2)^2 + \dots + C_{2m} (\Delta \theta_m - \Delta \theta_2)^2 + \dots + C_{m-1,m} (\Delta \theta_m - \Delta \theta_{m-1})^2]; \quad (2.90)$$

$$F = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j D_{ij} \dot{\theta}_i \dot{\theta}_j = \frac{1}{2} [D_{12} (\Delta \dot{\theta}_2 - \Delta \dot{\theta}_1)^2 + \dots + D_{1m} (\Delta \dot{\theta}_m - \Delta \dot{\theta}_1)^2 + \dots + D_{23} (\Delta \dot{\theta}_3 - \Delta \dot{\theta}_2)^2 + \dots + D_{2m} (\Delta \dot{\theta}_m - \Delta \dot{\theta}_2)^2 + \dots + D_{m-1,m} (\Delta \dot{\theta}_m - \Delta \dot{\theta}_{m-1})^2], \quad (2.91)$$

где синхронные жесткости и демпферные коэффициенты определяются в общем случае соответственно по формулам (2.69), (2.70), (2.87). (Механическим аналогом группы  $m$  генераторных агрегатов может служить группа  $m$  зубчатых колес, объединенных в своем движении планетарным редуктором).

Таким образом, группа  $m$  параллельно включенных синхронных агрегатов может быть описана  $m$  уравнениями движения Лагранжа (2.18) в вариациях с учетом действия обобщенных сил

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\Delta \theta}_j} + \frac{\partial V}{\partial \Delta \theta_j} + \frac{\partial F}{\partial \Delta \dot{\theta}_j} = \Delta M_{dj} - \Delta M_{ij} \quad (j = 1, \dots, m). \quad (2.92)$$

Отсюда видно, что устойчивое колебательное движение машин будет зависеть от характера изменения вращающего момента двигателей и момента сопротивления генераторов. У агрегатов с поршневыми двигателями колебания могут быть вызваны иррегулярностью вращающего момента двигателя и автоколебаниями автоматических регуляторов скорости и напряжения; у агрегатов с роторными двигателями колебания преимущественно могут быть вызваны автоколебаниями указанных автоматических устройств, так как вращающий момент подобных двигателей является постоянным.



Иррегулярность вращающего момента и колебания в системах регулирования могут вызвать вынужденные колебания агрегата, и в случае равенства частоты собственных колебаний с частотой возмущающих воздействий могут иметь место резонансные явления, сопровождающиеся возрастанием амплитуды колебаний.

При анализе синхронной связи параллельно включенных генераторов встречается необходимость установить влияние реактивного и активного сопротивлений на величину синхронной жесткости.

Последняя в общем виде определяется формулой (2.74) по угловой характеристике. Принимая во внимание общую зависимость синхронной мощности машины от угла вылета ротора (1.17), можно подобно (2.69) получить общую формулу синхронной жесткости

$$C = \frac{U_c}{x_{dл} x_{qл} + r_{ал}^2} \{ E_q x_{qл} \cos \theta_0 + (x_d - x_q) U_c \cos 2\theta_0 - r_{ал} \sin \theta_0 \}, \quad (2.93)$$

$$x_{dл} = x_d + x_{л}, \quad x_{qл} = x_q + x_{л}, \quad r_{ал} = r_a + r'_{л},$$

где индексом «л» отмечены активное и реактивное сопротивления, включенные между шинами и выводами статора генератора.